FEUILLE ED STATISTIQUE N^{0}2
LICENCE MASS 2$^{\text{ème}}$ année (2015/2016)

* ESTIMATION PONCTUELLE - MÉTHODE DES MOMENTS - MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE *

1. **(DS1 2014-2015)** Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ un échantillon dont chaque composante a pour densité la fonction f_θ donnée par :
$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(X_i) = 2\theta$
   (b) Soit T_n l'estimateur de θ obtenu par la méthode des moments. Déterminer T_n.
   (c) Ecrire la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.
   (d) Déterminer l'estimateur V_n du maximum de vraisemblance de θ.
   (e) Montrer que $T_n = V_n$ est un estimateur sans biais de θ.
   (f) Calculer le risque quadratique de T_n et montrer qu'il est convergent.
   (g) **Application.** Un échantillon de taille $n = 7$ donne les valeurs :

   `3.1  1.7  1.2  1.4  2.2  2.1  4.1.`

   Donner une estimation de θ.

2. Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ un échantillon.
Trouver les estimateurs du paramètre inconnu par la méthode du maximum de vraisemblance et par la méthode des moments si :
   (a) $X_i \sim U([\theta, 2\theta])$
   (b) $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$
   (c) $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$

   et dire pour chaque estimateur obtenu s'il est ou non sans biais.

3. **Remarque préliminaire :** La question (a) et les calculs nécessaires à la résolution de la question (b) ont été effectués au 1er semestre en TD de Probabilités (cf. exercice 1 de la Feuille 2). On pourra utiliser directement ces résultats (après avoir vérifié qu'on sait encore les retrouver !).
   (a) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer la loi de $X = e^Y$.
   (b) Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ un échantillon lognormal tel que :
$$X_i \sim f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} 1_{]0,+\infty[}(x), \quad \mu \in I\!R, \quad \sigma^2 > 0.$$
   Estimer les paramètres μ et σ^2 par la méthode des moments.

4. **(Exam Mai 2015)** Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha, k)$ de densité $f(x) = k\alpha^k / x^{k+1}$ pour $x \geq \alpha$ (et 0 sinon), où α est un réel strictement positif. On souhaite estimer les paramètres α et k à partir de l'échantillon de données suivant :

   1.10 1.20 1.58 1.77 3.50 3.94 11.80

   Si $k > 1$, alors X a pour espérance $EX = k\alpha/(k-1)$.
   Si $k > 2$ alors X a pour variance $VarX = \alpha^2 k/((k-1)^2(k-2))$.
   On donne aussi la fonction de répartition de X : $F(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^k$ pour $x \geq \alpha$.

(a) Ecrire la fonction de vraisemblance à partir d'un échantillon i.i.d. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

(b) En admettant que α est connu et égal à 1, le seul paramètre à estimer est k. Déterminer un estimateur de k par maximum de vraisemblance. Donner l'application numérique de l'estimation.

(c) En admettant que α est connu et égal à 1, déterminer un estimateur de k par la méthode des moments. Donner l'application numérique de l'estimation.

On souhaite maintenant déterminer un estimateur de α. On définit $Z_n = min(X_1, \ldots, X_n)$

(d) Montrer que $P(Z_n \leq x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

(e) En déduire que Z_n suit une loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha, nk)$, et donner l'espérance et la variance de Z_n.

(f) A partir des résultats précédents, montrez que Z_n est un estimateur de α et donner son biais.

(g) Montrer que Z_n est un estimateur convergent de α.

(h) Construire un estimateur sans biais de α, sous la condition que k est connu.

(i) Question supplémentaire (non posée à l'examen) : En exploitant la réponse à la question (a) que pouvez-vous dire de Z_n ?

5. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x; \beta) = 3x^2 \beta^{-3} \mathbb{1}_{[0,\beta]}(x) \qquad (\beta > 0)$$

(a) Expliciter la fonction de répartition F de X.

(b) Calculer l'espérance de X.

(c) Calculer la variance de X.

(d) Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ un échantillon tel que chacune des variables X_i suit la même loi que X. Utiliser la méthode des moments pour trouver un estimateur sans biais de β. Soit U_n cet estimateur.

(e) U_n converge-t-il en probabilité vers β ?

(f) Montrer que la densité de $X_{(n)} = \sup_{1 \leq i \leq n} X_i$ peut s'écrire :

$$g(x) = 3n \; x^{3n-1} \beta^{-3n} \mathbb{1}_{[0,\beta]}(x)$$

(g) Déterminer la fonction de vraisemblance L de l'échantillon $\boldsymbol{X}$.

(h) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de β. On notera V_n cet estimateur. En déduire la densité de V_n.

(i) Calculer $E(V_n)$. En déduire un estimateur W_n sans biais de β.

(j) W_n converge-t-il en probabilité vers β ?

(k) Comparer U_n et W_n.

(l) Un échantillon de taille $n = 10$ donne les valeurs :

`1.86 1.78 1.49 0.55 1.05 1.79 1.21 1.81 0.21 1.99`

Donner une estimation de β.